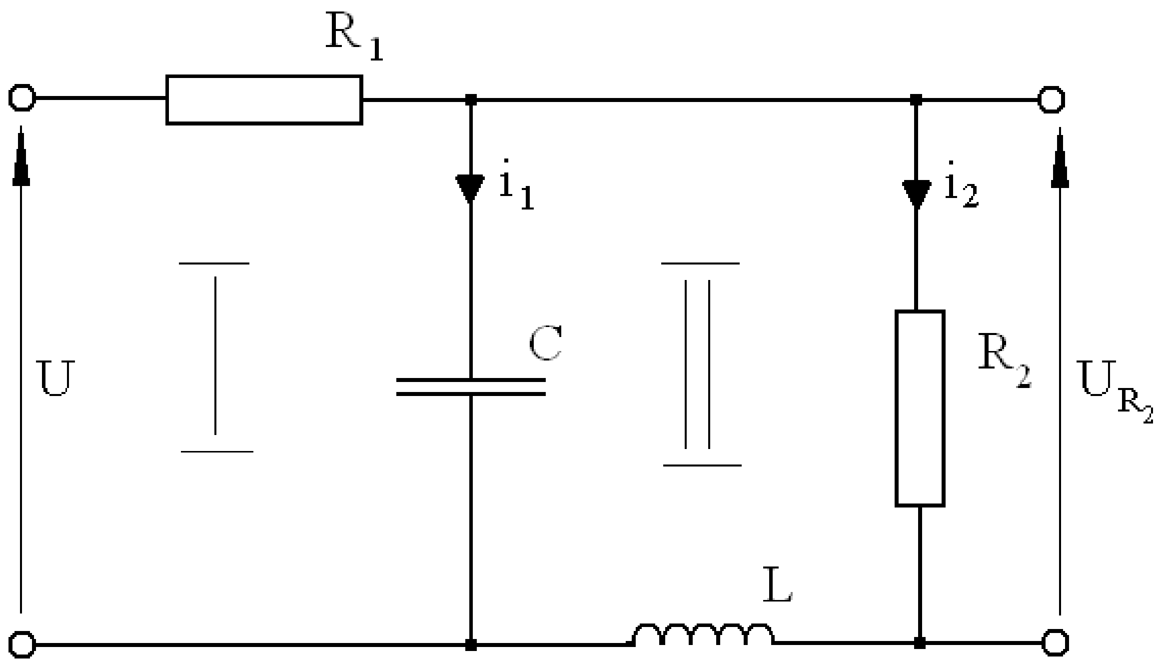
Zadanie 1:

Wyznaczyć macierze przestrzeni stanów dla podanego poniżej schematu połączeń.



Rozwiązanie:

$$[U]=[Z]*[i]$$

$$\begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1+\frac{1}{sc} & -\frac{1}{sc} \\ -\frac{1}{sc} & R_2+sL+\frac{1}{sc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

$$\det Z = \begin{bmatrix} R_1+\frac{1}{sc} & -\frac{1}{sc} \\ -\frac{1}{sc} & R_2+\frac{1}{sc}+sL \end{bmatrix} = \left(R_1+\frac{1}{sc}\right)\left(R_2+sL+\frac{1}{sc}\right)-\frac{1}{s^2c^2} =$$

$$= R_1R_2+sR_1L+\frac{R_1+R_2}{sc}+\frac{L}{c}+\frac{1}{s^2c^2}-\frac{1}{s^2c^2}=\frac{R_1+R_2}{sc}+sR_1L+\frac{L}{c}+R_1+R_2$$

$$\det i_2 = \begin{bmatrix} R_1 + \frac{1}{sc} & U \\ -\frac{1}{sc} & 0 \end{bmatrix} = \frac{U}{sc}$$

$$i_2 = \frac{\det i_2}{\det Z} = \frac{U}{sc\left(\frac{R_1 + R_2}{sc} + sR_1 L + \frac{L}{c} + R_1 + R_2\right)} = \frac{U}{s^2 cLR_2 + (L + cR_1 R_2)s + R_1 + R_2}$$

$$U_{R_2} = i_2 R_2 = \frac{UR_2}{s^2 cLR_2 + (L + cR_1 R_2)s + R_1 + R_2}$$

$$\frac{U_{R_2}}{U} = \frac{R_2}{s^2 + \frac{L + cR_1 R_2}{cLR_1} s + \frac{R_1 + R_2}{cLR_1}},$$

czyli:

$$\beta_0 = R_2$$
$$\alpha_0 = \frac{R_1 + R_2}{cLR_1}$$
$$\alpha_1 = \frac{L + cR_1 R_2}{cLR_1}$$

Można zapisać macierze:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{R_1 + R_2}{cLR_1} \\ 1 & -\frac{L + cR_1 R_2}{cLR_1} \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} R_2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad d = [0]$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{R_1 + R_2}{cLR_1} \\ 1 & -\frac{L + cR_1 R_2}{cLR_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0u(t)$$

Wnioski:

W powyższym przykładzie skorzystałem z prostszej metody obliczenia macierzy przestrzeni stanów, jaką było przedstawienie schematu jako czwórnika i obliczenie dla kolejnych oczek prawa Ohma. W ten sposób ominąłem trudne do przekształceń równania różniczkowe. W powyższym przykładzie nie uwzględniłem oczka numer jeden, gdyż nie ma ono wpływu na końcowy wynik, do którego dążyłem.

Wykonując poprawnie wszystkie obliczenia doszedłem do następujących równań przestrzeni stanu, zgodnych ze wzorem ogólnym:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + bu(t) \\ y = cx(t) + du(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{R_1 + R_2}{cLR_1} \\ 1 & -\dfrac{L + cR_1R_2}{cLR_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0u(t) \end{cases}$$