

Cel projektu.

Projekt składa się z dwóch podstawowych zadań, mających na celu zaprojektowanie dla danej transmitancji:

$$G(s) = \frac{1}{m_2 s^2 + m_1 s + 1} e^{-s\tau}$$

gdzie wartości  $m_2 = 27$ ,  $m_1 = 12$ , a  $\tau = 4$ .

$$G(s) = \frac{1}{27s^2 + 12s + 1} e^{-4s}$$

analogowego regulatora PID doboru jego nastaw i przetransformowanie go na cyfrowy regulator PID, postępując według następujących podpunktów:

- 1a) wykreślić charakterystyki częstotliwościowe i czasowe obiektu oraz pokazać rozkład biegunów i zer
- 1b) wyznaczyć wzmocnienie statyczne obiektu oraz jego zastępczą stałą czasową i zastępcze opóźnienie
- 1c) scharakteryzować właściwości obiektu

2. dobrać okres próbkowania obiektu podając uzasadnienie wyboru

3a) dla wybranego okresu próbkowania wyznaczyć zastępczą transmitancję dyskretną obiektu

$$G(z^{-1}) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots} z^{-k}$$

"widzianą" przez regulator cyfrowy wypracowujący schodkowy sygnał sterujący

- 3b) wykreślić charakterystyki częstotliwościowe i czasowe obiektu dyskretnego oraz pokazać rozkład biegunów i zer
- 3c) scharakteryzować właściwości uzyskanego modelu dyskretnego

4. pokazać zmianę rozkładu biegunów i zer oraz omówić ew. zmianę właściwości modelu dyskretnego dla przypadków niedokładnego określenia współczynników licznika i mianownika jego transmitancji dyskretniej według zasady:

- 4a) współczynnik  $b_0$  licznika określono w wysokości 120% rzeczywistej wartości
- 4b) współczynnik  $a_1$  mianownika określono w wysokości 80% rzeczywistej wartości
- 4c) wystąpiły równocześnie błędy określenia współczynników transmitancji modelu dyskretnego opisane w punktach 4a) i 4b)

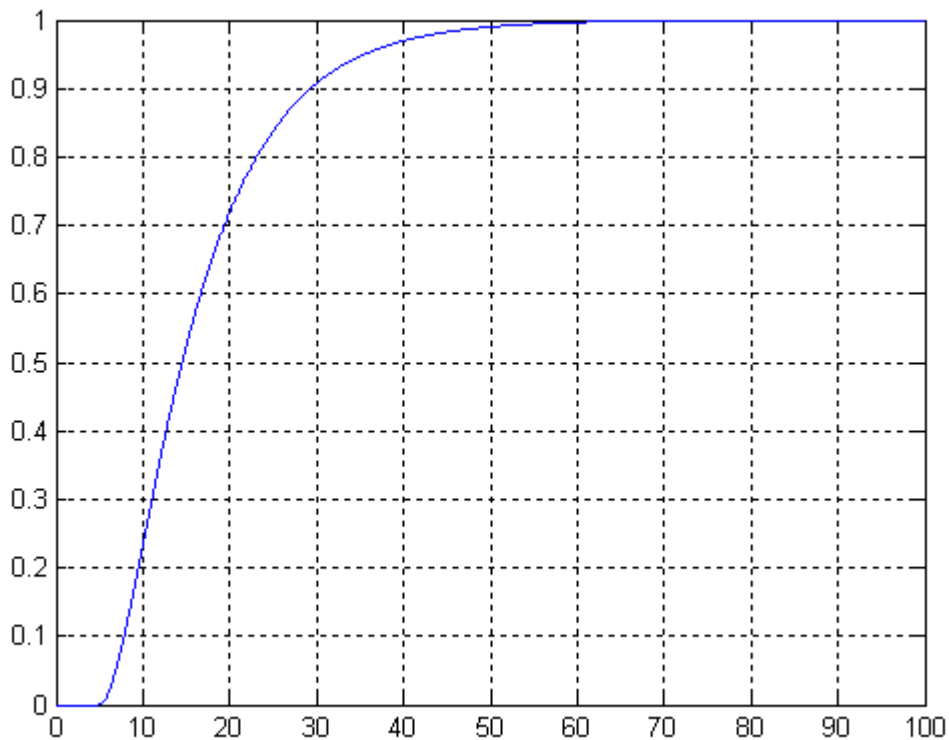
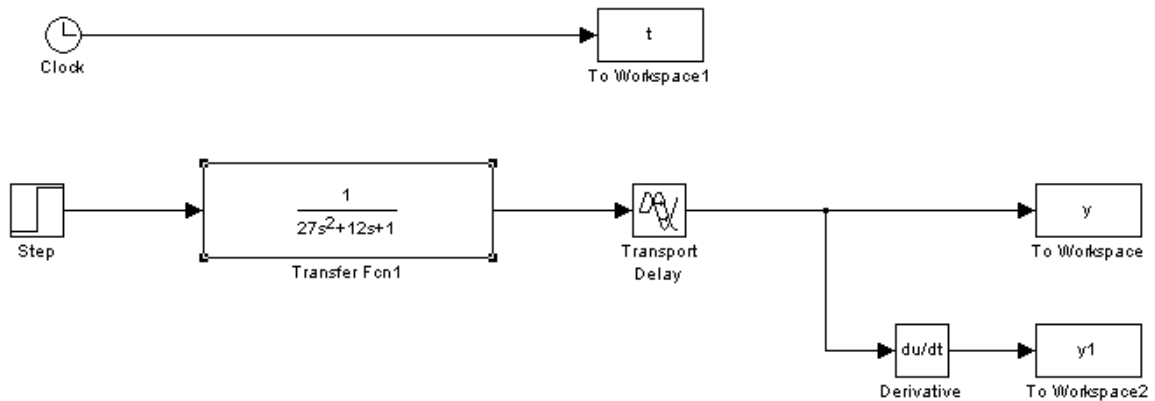
5. pokazać zmianę rozkładu biegunów i zer oraz omówić ew. zmianę właściwości modelu dyskretnego dla przypadków innego doboru okresu próbkowania, według zasady:

- 5a) okres próbkowania wynosi 50% wartości dobranej w pkt. 2
- 5b) okres próbkowania wynosi 150% wartości dobranej w pkt. 2

## Ad 1. Obiekt ciągły.

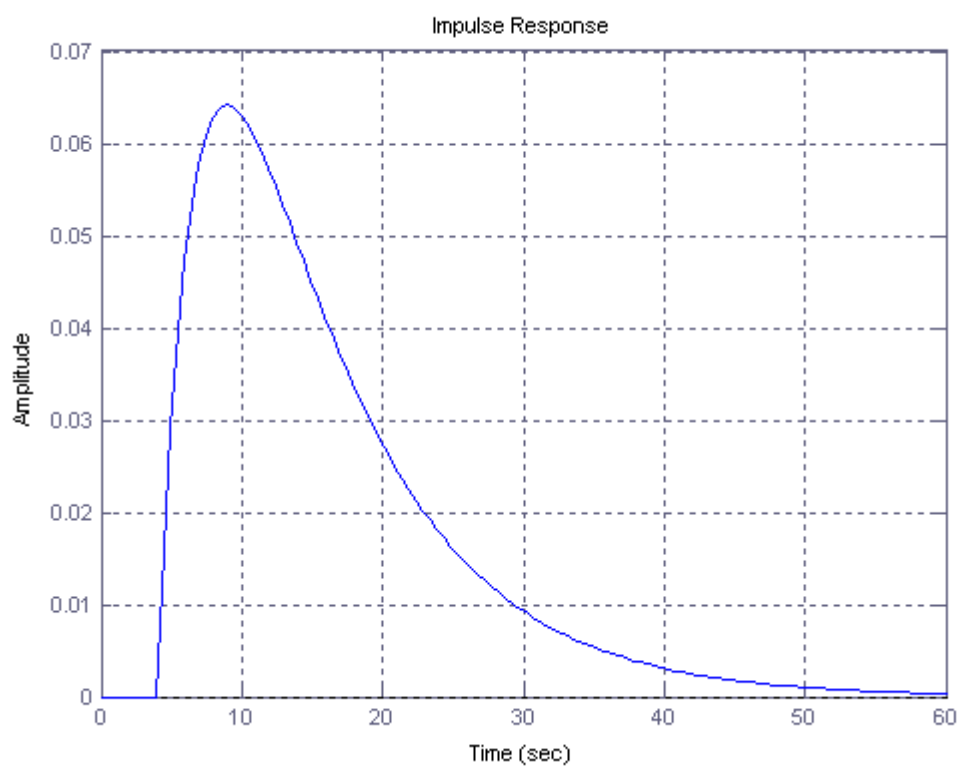
### a) Charakterystyki obiektu

Charakterystyka czasowa odpowiedzi na skok jednostkowy i impuls Dirack'a dla podanego niżej układu:



rys 1. odpowiedź układu na skok jednostkowy na wejściu.

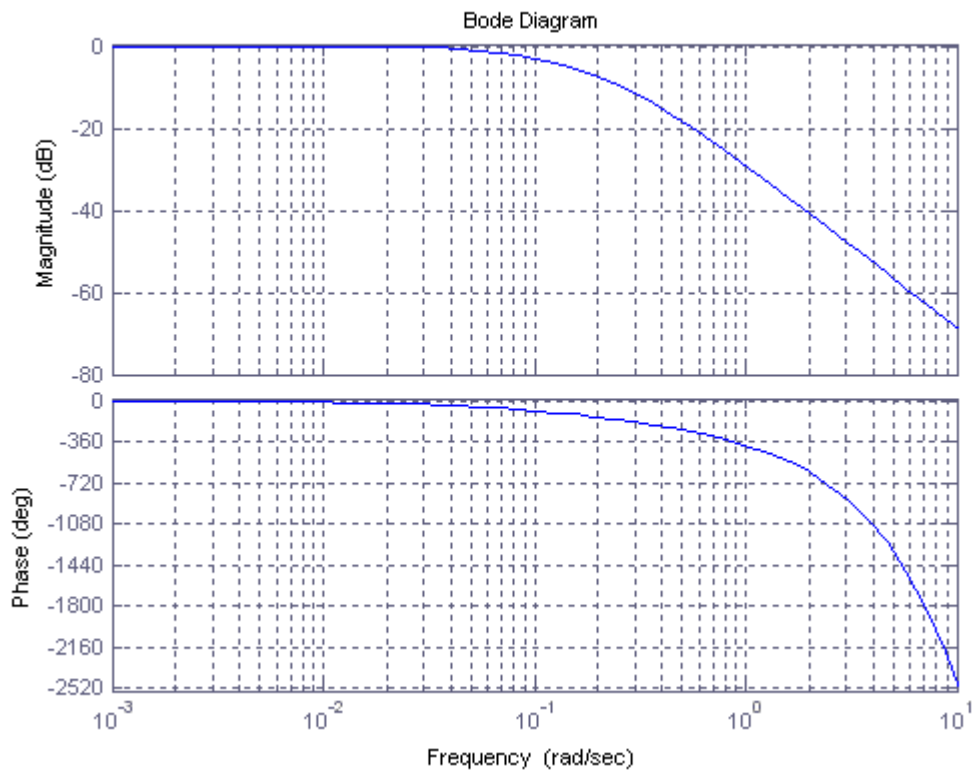
My użyliśmy tu programu Simulink, ale można równie dobrze wpisać w programie Matlab, komendę *step(transmitancja)*



rys 2. odpowiedź na impuls Dirack'a na wejściu

W programie Matlab jest to komenda *impulse(transmitancja)*

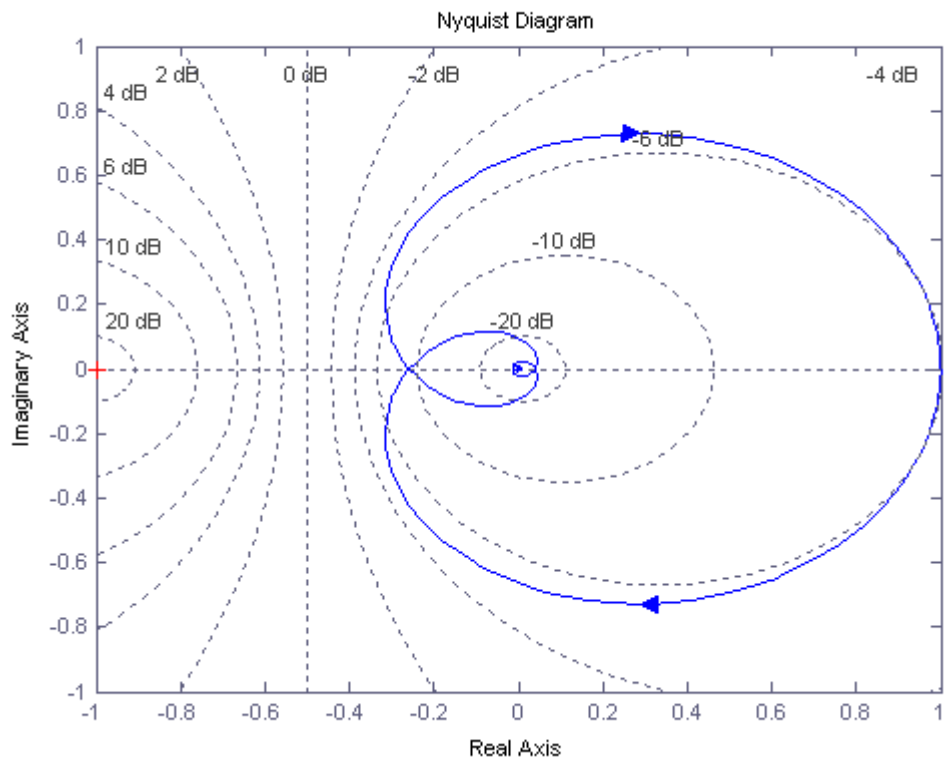
## Charakterystyki logarymiczne: częstotliwościowa amplitudowa i częstotliwościowa fazowa (Bode)



rys 3. Zobrazowane dwie charakterystyki Bode'go

W programie Matlab jest to komenda *bode(transmitancja)*

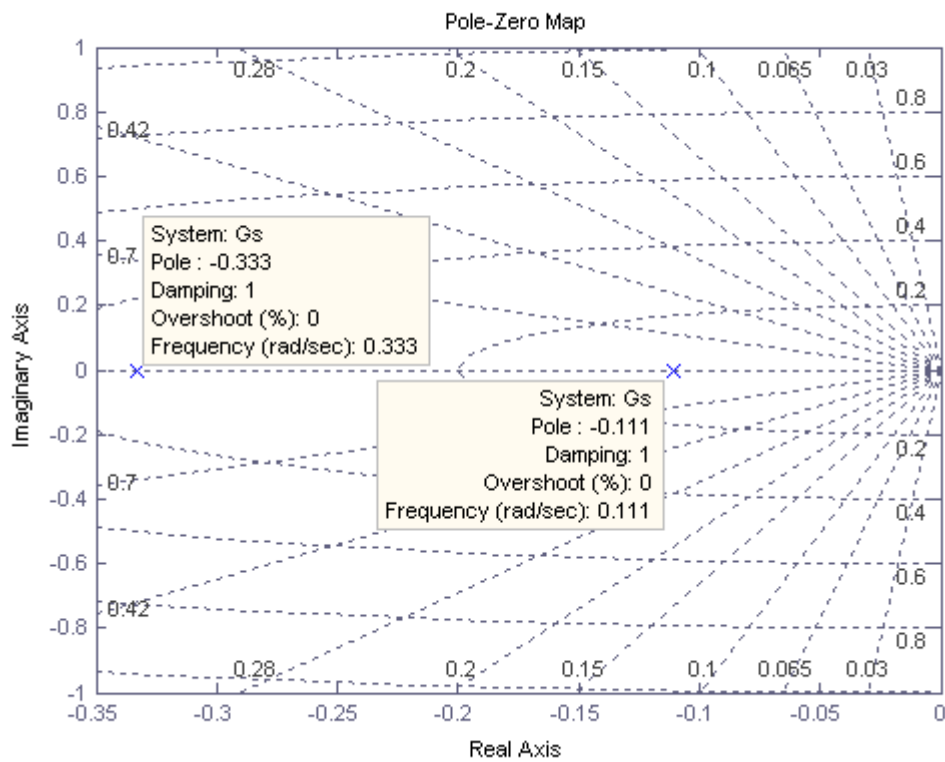
## Charakterystyka amplitudowo- fazowa (Nyquist)



rys 4. Charakterystyka Nyquista

W programie Matlab użyliśmy komendy *nyquist(transmitancja)*

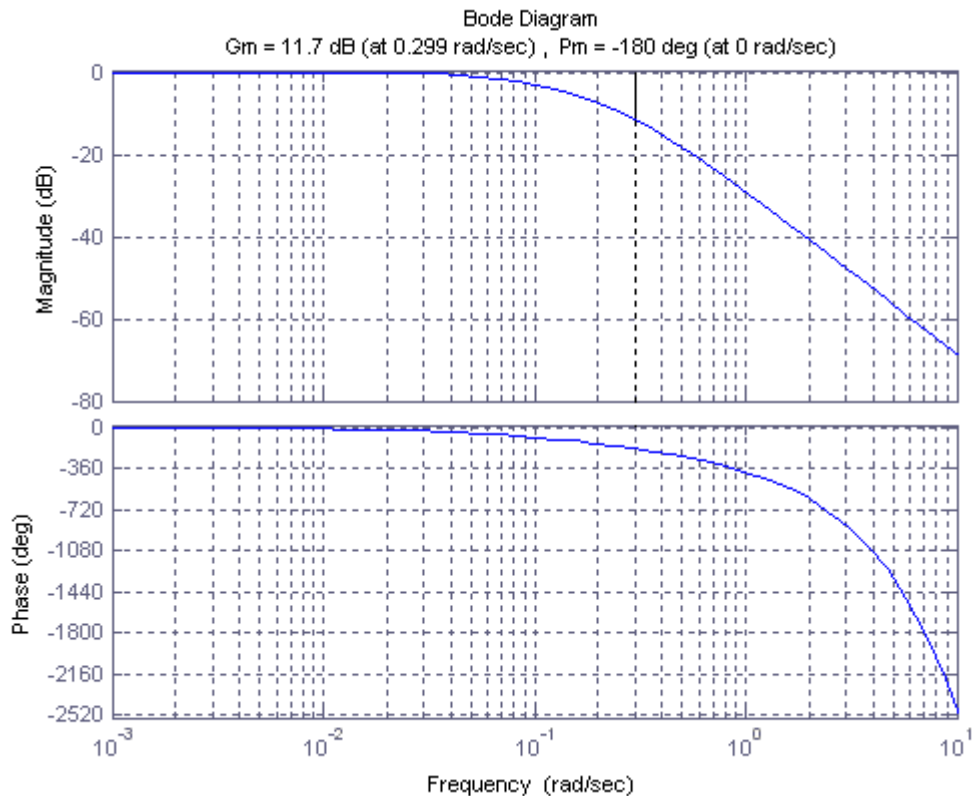
## Charakterystyka przedstawiająca rozkład zer i biegunów



rys 5. Jak widać na rysunku, rozkład odbywa się na osi rzeczywistej ujemnej.

W programie Matlab jest to komenda *pzmap(transmitancja)*

## Charakterystyka marginesu fazy i amplitudy do układu



rys 6. Margines fazy i amplitudy przedstawiony graficznie.

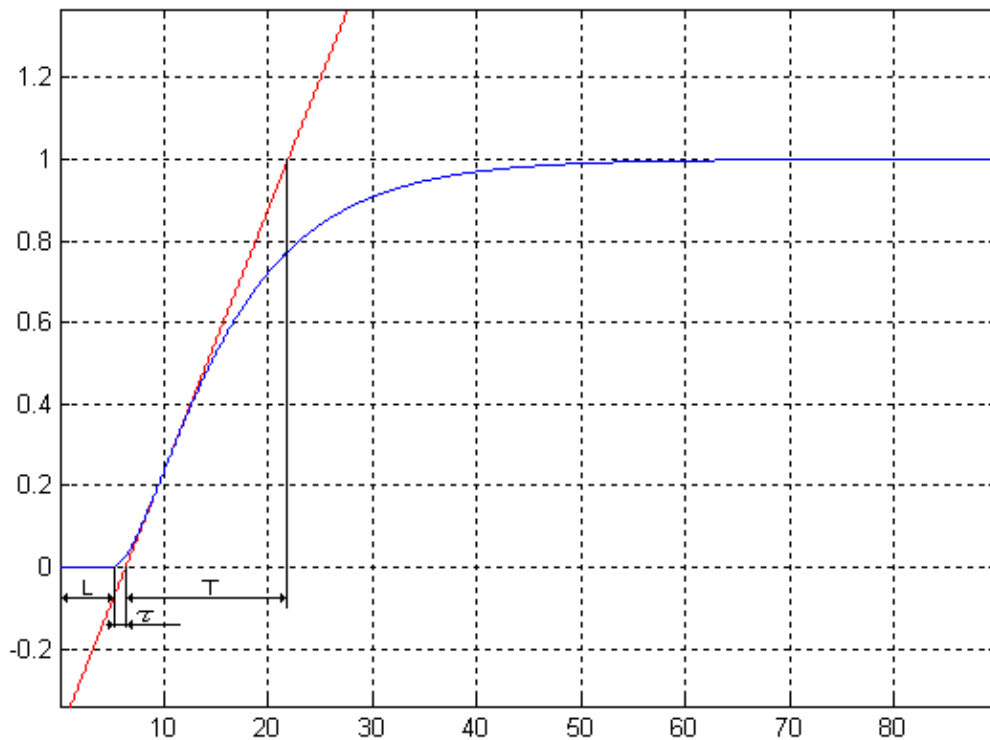
W programie Matlab korzystamy z funkcji *margin(transmitancja)*

Kolejnym krokiem po zobrazowaniu przez nas marginesów było ich wyliczenie. W tym celu skorzystaliśmy z funkcji  $[G_m, G_p, w_{cg}, w_{cp}] = \text{margin}(\text{transmitancja})$ , otrzymując następujące wyniki:

Margines amplitudy:  $G_m = 11,7 \text{ dB}$  dla  $G = 3,8551$   
zgodnie ze wzorem:  $G_m = 20 * \log_{10}(G)$

Margines fazy:  $G_p = -180^\circ$  dla  $\omega_{cp} = 0,2989 [\text{rad/sek}]$

b) Wyznaczenie parametrów



rys 7. przebieg czasowy do wyznaczenia parametrów.

Na podstawie przebiegu czasowego odpowiedzi skokowej obiektu, wyznaczamy styczną do krzywej, a za jej pomocą z kolei, parametry:

$$\begin{aligned}K_s &= 1; \\L &= 5.005; \\T &= 15.576; \\\tau &= 1.353; \\\tau_c &= L + \tau = 6,358;\end{aligned}$$

c) Własności obiektu

Brak oscylacji i przeregulowania, gdy podajemy na wejściu skok jednostkowy. Dla charakterystyki Nyquist'a, zgodnie z tzw. „regułą lewej dłoni”, mijamy punkt  $-1, j0$  mając go po lewej stronie i nie przecinając go. W związku z tym, układ ten będzie stabilny. Dla wykresu przedstawiającego rozkład zer i biegunów odczytać możemy, iż układ będzie stabilny. Wynika to z tego, że jest przebieg odpowiedzi nieoscylacyjny (aperiodyczny) o wartości dążącej do zera dla  $t \rightarrow \infty$ . Posiadamy także w układzie odpowiedni zapas fazy i amplitudy, co

wynika z przeprowadzonych powyżej obliczeń. Obiekt regulacji jest sterowalny, gdyż wyznacznik macierzy sterowalności „W” jest różny od zera i wynosi 1, co uwidoczniamy poniżej.

```
>> licznik=[1]
licznik = 1
>> mianownik=[27 12 1]
mianownik = 27 12 1
>> [A,B,C,D] = tf2ss(licznik,mianownik)
A =
  -0.4444  -0.0370
   1.0000   0
B =
   1
   0
C =
   0  0.0370
D =
   0
>> Ab=A*B
Ab =
  -0.4444
   1.0000
>> W=[B Ab]
W =
   1.0000  -0.4444
   0  1.0000
>> det(W)
ans = 1
```

**Dodatkowo:**

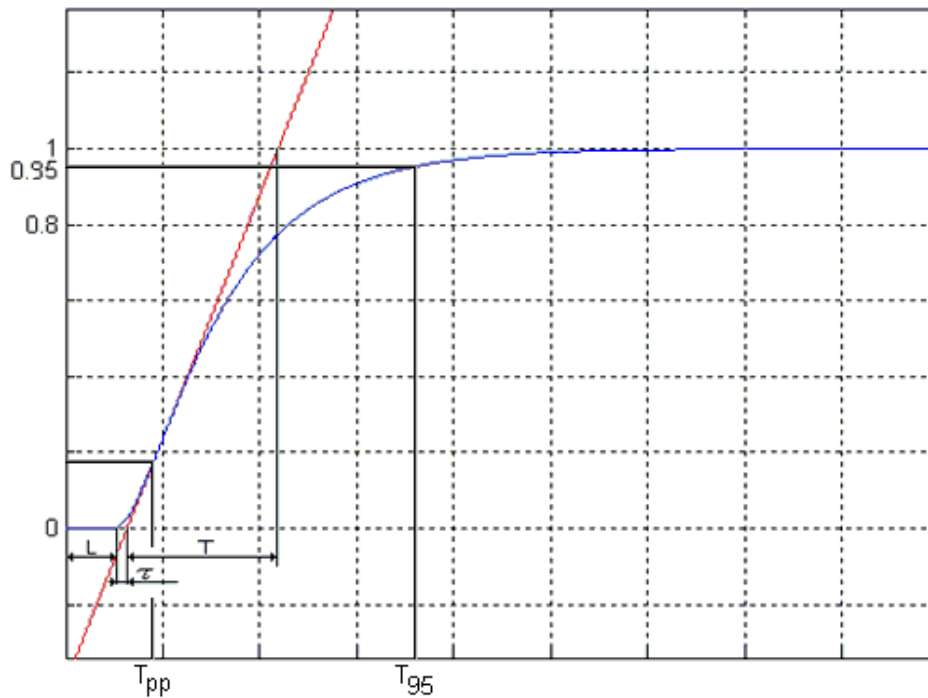
```
>> cA=C*A
cA =
   0.0370   0
>> V=[C, cA]
V =
   0  0.0370  0.0370   0
>> V=[C cA]
V =
   0  0.0370  0.0370   0
>> V=[C; cA]
V =
   0  0.0370
   0.0370   0
>> det(V)
ans = -0.0014
```

Układ opisany modelem przestrzeni stanu tak, jak powyżej jest obserwowalny ponieważ wyznacznik macierzy obserwowalności „V” jest różny od zera.

## Ad 2. Dobranie okresu próbkowania obiektu

Spośród wielu metod doboru okresu próbkowania, wybraliśmy metodę opartą na doborze  $T_p$  na podstawie zastępczego opóźnienia.

- o Zgodnie ze wzorami na obliczenie czasu próbkowania



rys 8. charakterystyka, z której korzystamy podczas wyliczania  $T_{pp}$  oraz  $T_{95}$ .

$$T_{pp} = 8,954$$

$$T_p = \frac{1}{12} * T_{pp}$$

czyli:

$$T_p = \frac{1}{12} * 8,954 = 0,746$$

- o Zgodnie z zależnością na stałą czasową uzyskaną z 95% odpowiedzi na skok jednostkowy podany na wejście

$$T_{95} = 34,61$$

$$T_p = \left( \frac{1}{9} \div \frac{1}{15} \right) * T_{95}$$

$$T_p = \left( \frac{1}{6} \div \frac{1}{12} \right) * T_{95}$$

czyli uogólniając:  $T_p = \frac{1}{10} * T_{95}$

U nas:

$$T_p = \frac{1}{10} * 34,61 = 3,461$$

- o Zgodnie z zależnością na zastępczy czas opóźnienia i zastępczą stałą czasową:

$$0,1 \leq \frac{\tau_c}{T} \leq 1,0$$

$$T_p = (1,2 \div 0,35) * \tau_c$$

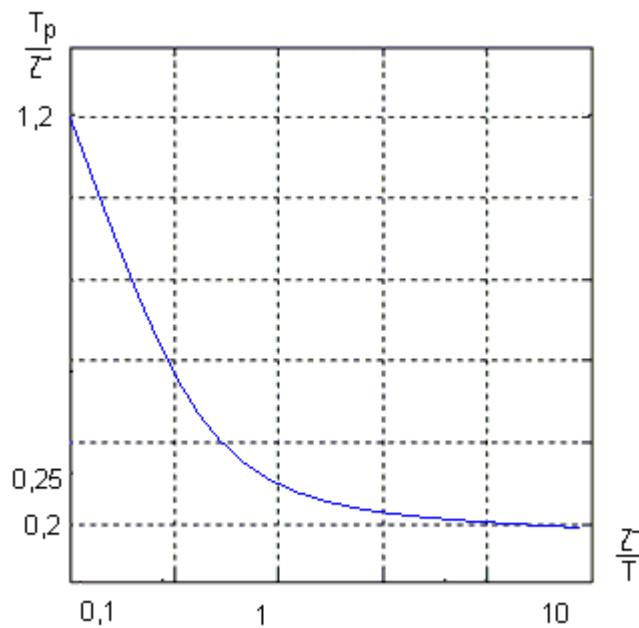
lub:

$$1,0 \leq \frac{\tau_c}{T} \leq 10$$

$$T_p = (0,35 \div 0,2) * \tau_c$$

gdzie u nas:

$$\frac{\tau_c}{T} = \frac{6,358}{15,457} \approx 0,408$$



rys 9. Charakterystyka pomocnicza do wzorów.

czyli korzystając z pierwszej zależności:

$$T_p = 0,35 * 6,358 \approx 2,225$$

$$T_p = 1,2 * 6,358 \approx 7,630$$

Tę zależność wybieramy i u nas  $T_p=2$

### Ad 3. Dyskretyzacja

a) Wyznaczenie zastępczej transmitancji dyskretnej obiektu

Korzystając z transmitancji  $G(s) = \frac{1}{27s^2 + 12s + 1} e^{-4s}$  oraz czasu próbkowania  $T_p=2$ , w programie Matlab wpisujemy komendę *transmitancja\_dyskretna=c2d(transmitancja\_ciągła, czas\_próbkowania)*, otrzymujemy:

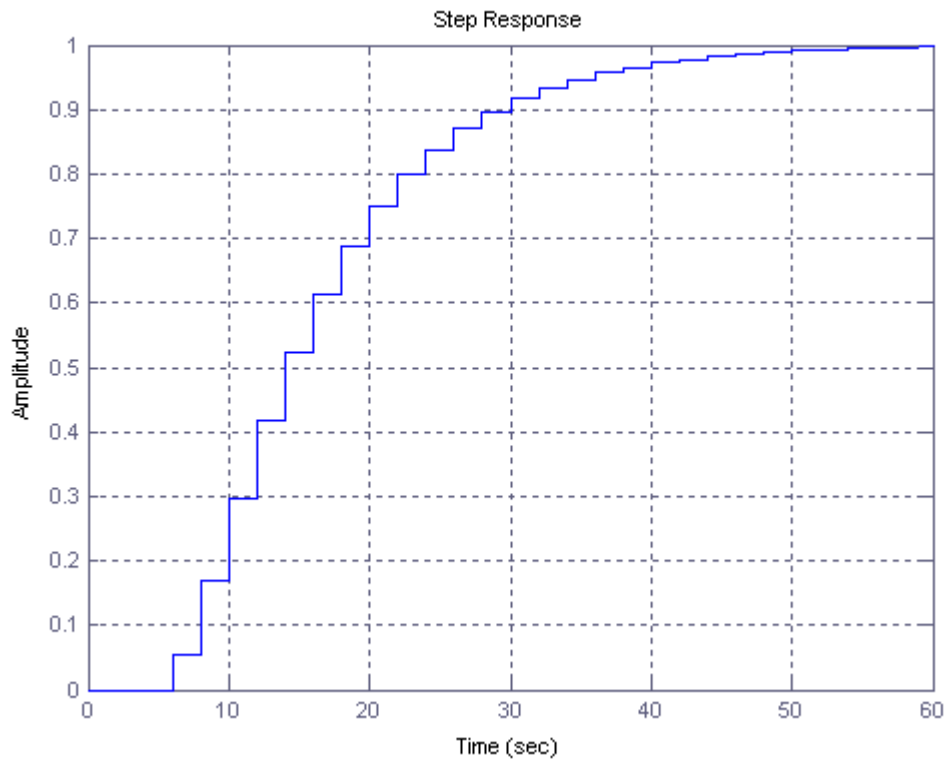
$$G(z) = \frac{0,0556 * z + 0,04136}{z^2 - 1,314 * z + 0,4111} * z^{-2}$$

Dalej, korzystając z komendy *set(Gz, 'var', 'z^-1')*, uzyskamy:

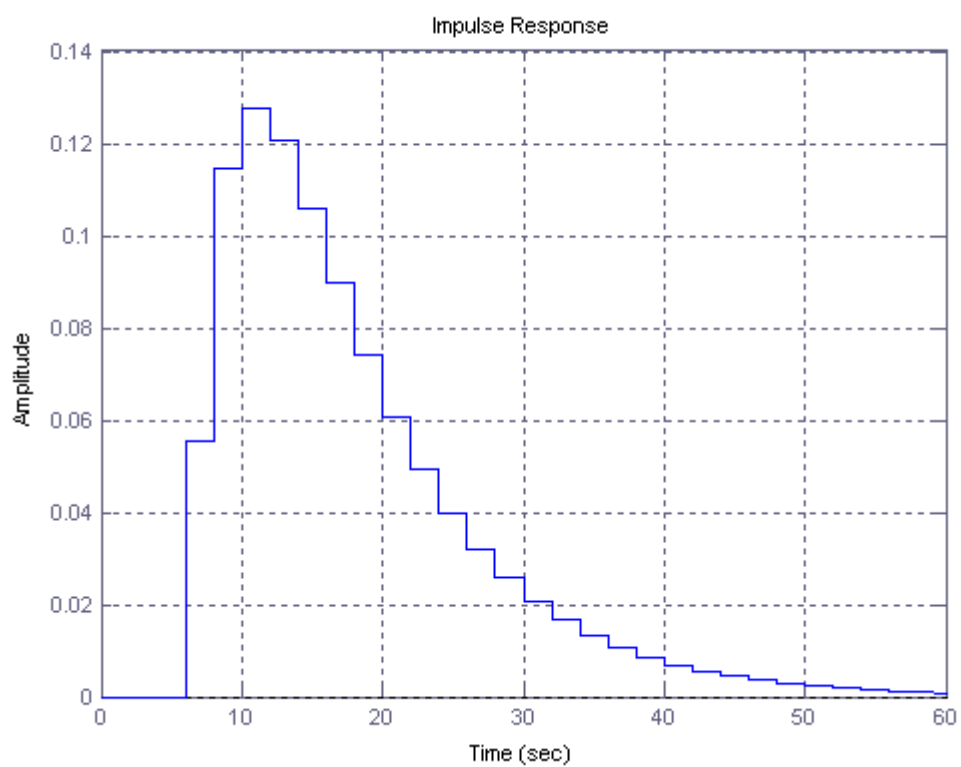
$$G(z) = \frac{0,0556 + 0,04136 * z^{-1}}{1 - 1,314 * z^{-1} + 0,4111 * z^{-2}} * z^{-3}$$

b) charakterystyki czasowe i częstotliwościowe obiektu dyskretnego

Charakterystyka czasowa odpowiedzi na skok jednostkowy i impuls Dirack'a:

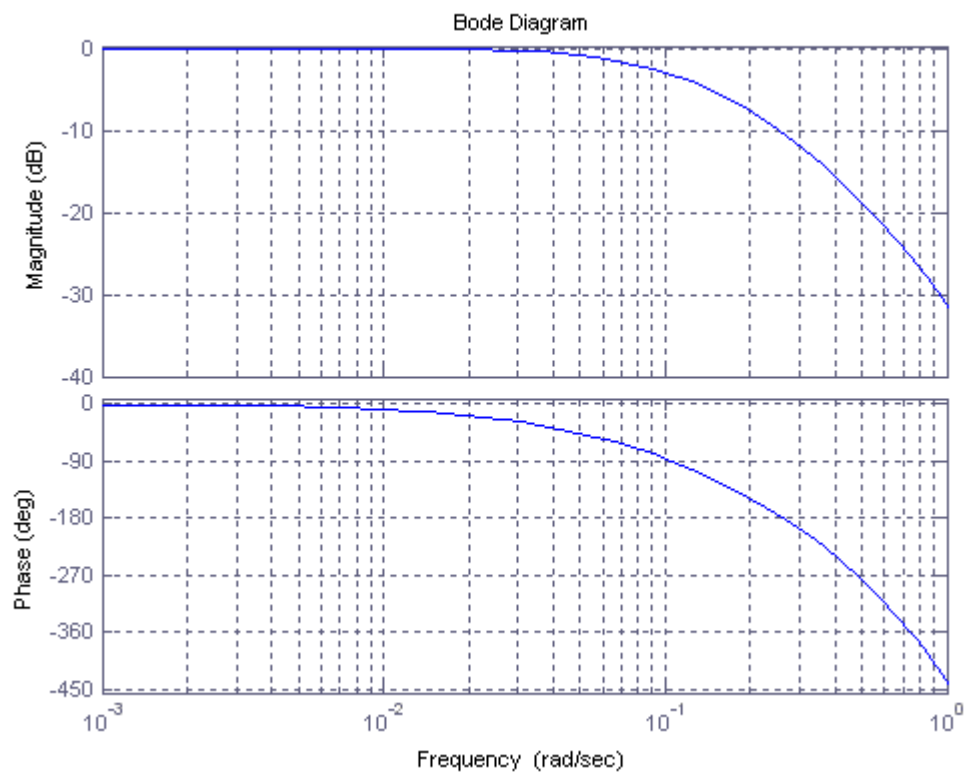


rys 10. odpowiedź układu dyskretnego na skok jednostkowy na wejściu.



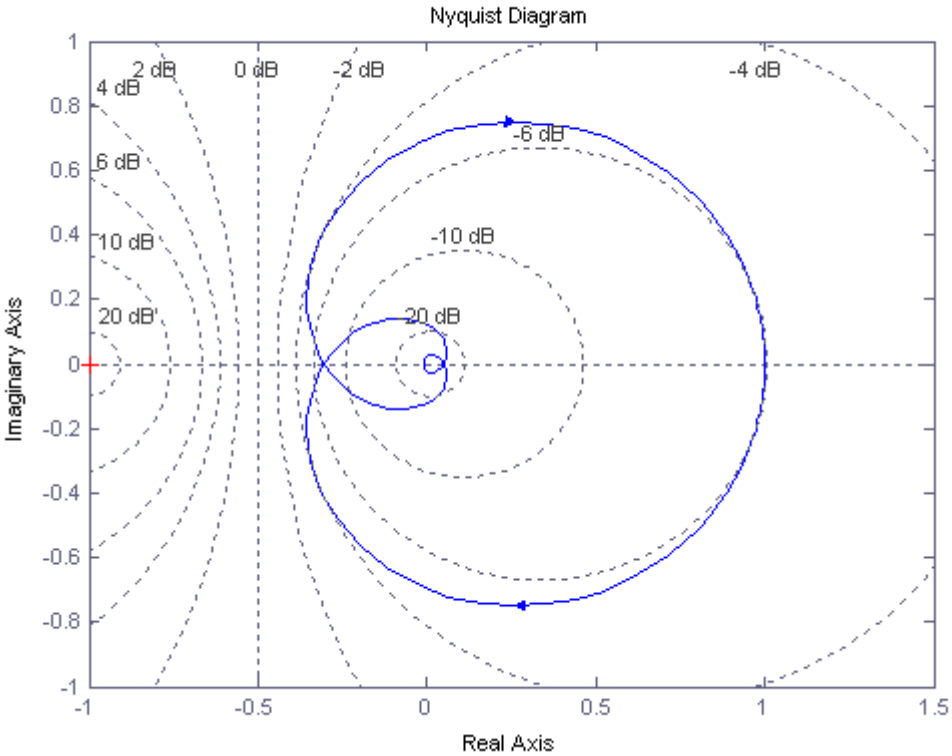
rys 11. odpowiedź na impuls Dirack'a na wejściu układu dyskretnego

## Charakterystyki logarytmiczne: częstotliwościowa amplitudowa i częstotliwościowa fazowa (Bode)



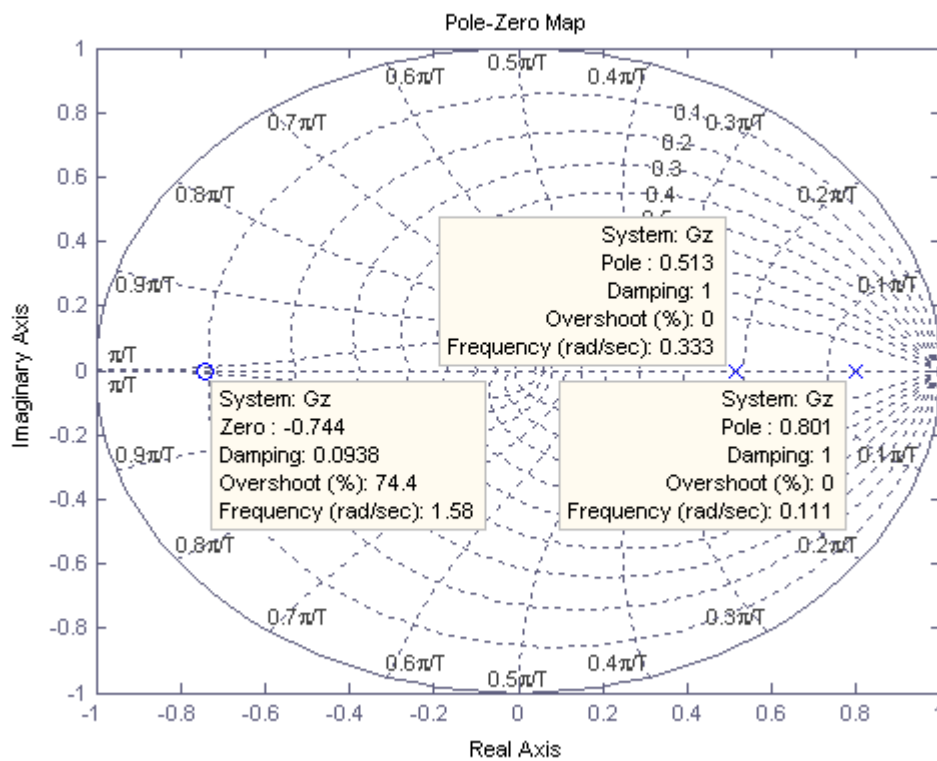
rys 12. wykresy Bode'go dla naszego obiektu

# Charakterystyka amplitudowo- fazowa (Nyquist)



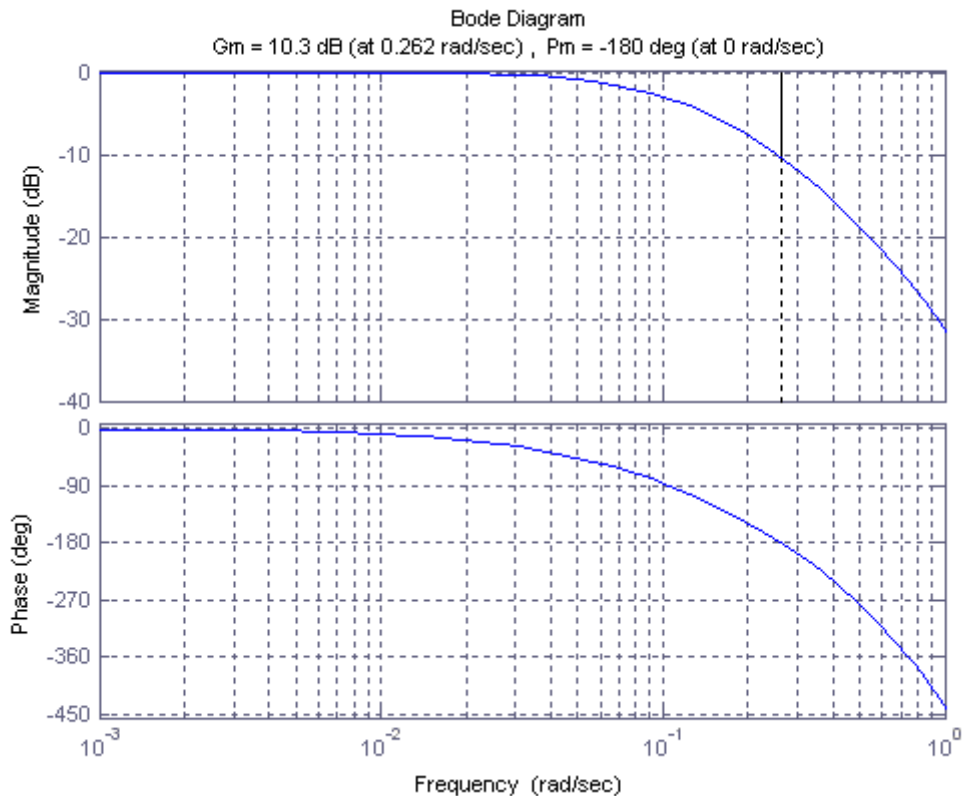
rys 13. Charakterystyka Nyquist'a dla obiektu dyskretnego.

## Rozkład zer i biegunów



rys 14. charakterystyka przedstawiająca rozkład zer i biegunów dla obiektu dyskretnego

## Charakterystyka marginesu fazy i amplitudy do układu



W programie Matlab korzystamy z funkcji *margin(transmitancja)*

Kolejnym krokiem po zobrazowaniu przez nas marginesów było ich wyliczenie. W tym celu skorzystaliśmy z funkcji *[Gm, Gp, wcg, wcp]=margin(transmitancja)*, otrzymując następujące wyniki:

Margines amplitudy:  $G_m=10,3\text{dB}$  dla  $G=3,2891$   
zgodnie ze wzorem:  $G_m = 20 * \log_{10}(G)$

Margines fazy:  $G_p=-180^\circ$  dla  $\omega_{cp}=0,2616[\text{rad/sek}]$

c) właściwości obiektu po dyskretyzacji

Badanie sterowalności:

```
Z = 0.0556 0.0414
P = 1.0000 -1.3140 0.4111
K = 3
>> [A,B,C,D]=zp2ss(Z,P,K)
A =
    1.0000    0    0
    1.0000 -0.9029 0.7350
    0 0.7350    0
B =
    1
    0
    0
C =
    3.0000 -2.7981 2.2058
D = 0
>>
>>
>> Ab=A*B
Ab =
    1
    1
    0
>> A2=A*A
A2 =
    1.0000    0    0
    0.0971 1.3554 -0.6636
    0.7350 -0.6636 0.5402
>> A2b=A2*B
A2b =
    1.0000
    0.0971
    0.7350

>> W=[B Ab A2b]
W =
    1.0000 1.0000 1.0000
    0 1.0000 0.0971
    0 0 0.7350
>> det(W)
ans = 0.7350
>>
```

Badanie obserwowalności:

```

>> cA=C*A
cA =
    0.2019    4.1477   -2.0566
>> A2=A*A
A2 =
    1.0000     0         0
    0.0971    1.3554   -0.6636
    0.7350   -0.6636    0.5402
>> cA2=C*A2
cA2 =
    4.3495   -5.2564    3.0484
>> V=[C;cA;cA2]
V =
    3.0000   -2.7981    2.2058
    0.2019    4.1477   -2.0566
    4.3495   -5.2564    3.0484
>> det(V)
ans = -9.8821

```

Uzyskany przez nas obiekt dyskretny:

$$G(z) = \frac{0,0556 + 0,04136 * z^{-1}}{1 - 1,314 * z^{-1} * 0,4111 * z^{-2}} * z^{-3}$$

jest sterowalny i obserwowalny, ponieważ zostały spełnione następujące warunki:

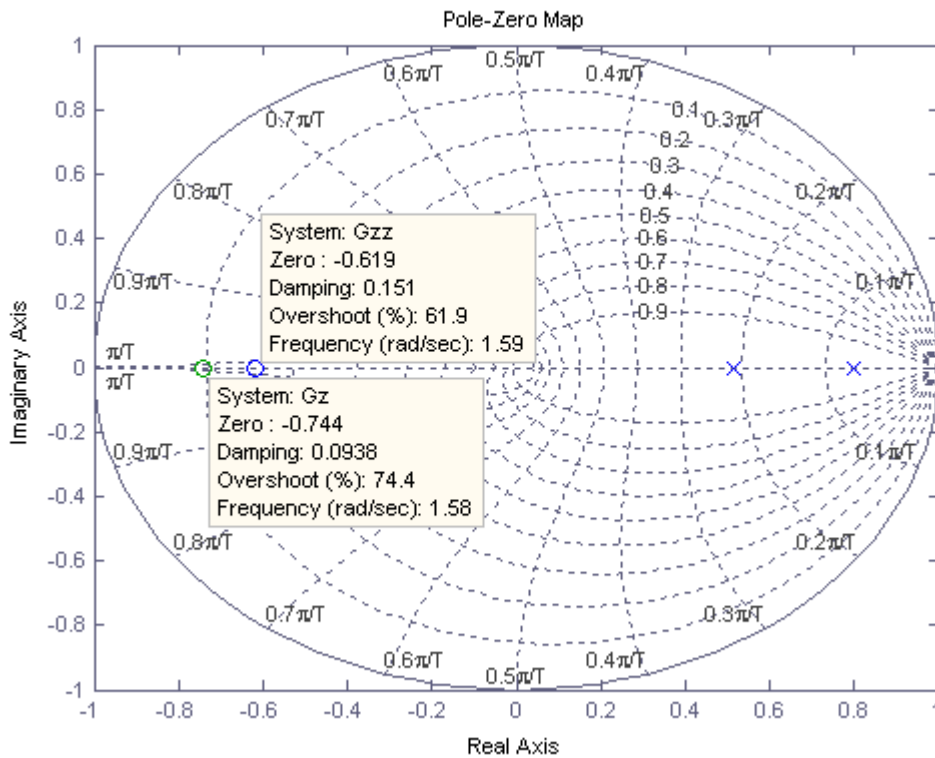
- sterowalność                       $\det(W) \neq 0$
- obserwowalność                     $\det(V) \neq 0$

Z rysunku 15 wynika, że zera i bieguny naszego modelu dyskretnego leżą wewnątrz koła jednostkowego na płaszczyźnie zespolonej, co oznacza, że uzyskany przez nas model jest minimalno-fazowy.

#### Ad 4. Zmiana zer i biegunów w przypadku niedokładności

a) Zmiana do 120% dla  $b_0$

$$G(z) = \frac{0,0667 * z^{-1} + 0,04136 * z^{-2}}{1 - 1,314 * z^{-1} + 0,4111 * z^{-2}} * z^{-2}$$



rys 15. charakterystyka przedstawiająca rozkład zer i biegunów dla obiektu dyskretnego przy  $b_0$  na poziomie 120%

Zmiana współczynnika „ $b_0$ ” do wartości 120% początkowej, nie wpłynęła na zmianę charakteru obiektu. Nadal jest on obiektem minimalno-fazowym, sterowalnym i obserwowalnym.

Sterowalność:

```

W=[B Ab A2b]
W =
    1.0000    1.0000    1.0000
         0    1.0000    0.0971
         0         0    0.7350
>> det(W)
ans =    0.7350
    
```

Obserwowalność:

```
>> V=[C;cA;cA2]
```

```
V =
```

```
 3.0000 -3.0329  2.2162
```

```
 -0.0329  4.3673 -2.2291
```

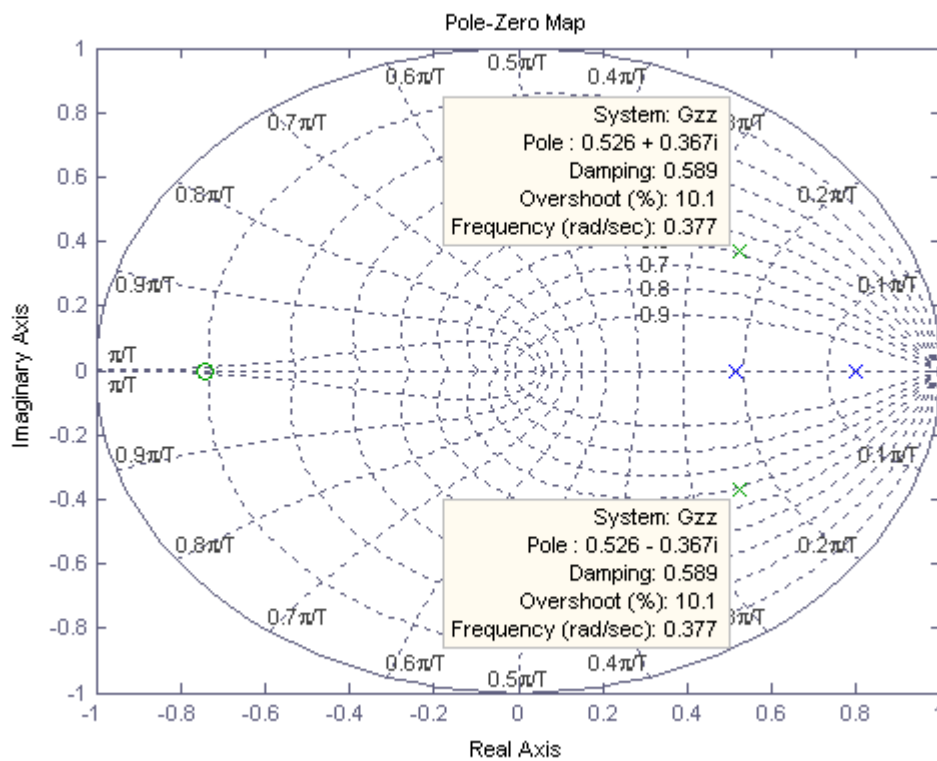
```
 4.3343 -5.5816  3.2098
```

```
>> det(V)
```

```
ans = -7.8317
```

b) zmiana do 80% dla  $a_1$

$$G(z) = \frac{0,0556 * z^{-1} + 0,0138 * z^{-2}}{1 - 1,051 * z^{-1} + 0,6412 * z^{-2}} * z^{-2}$$



rys 16. charakterystyka przedstawiająca rozkład zer i biegunów dla obiektu dyskretnego przy  $a_1$  na poziomie 80%

Zmiana współczynnika „ $a_1$ ” na wartość 80% jego wartości początkowej nie wpłynęła na zmianę charakteru obiektu. Nadal jest on obiektem minimalnofazowym, sterowalnym i obserwowalnym.

Sterowalność:

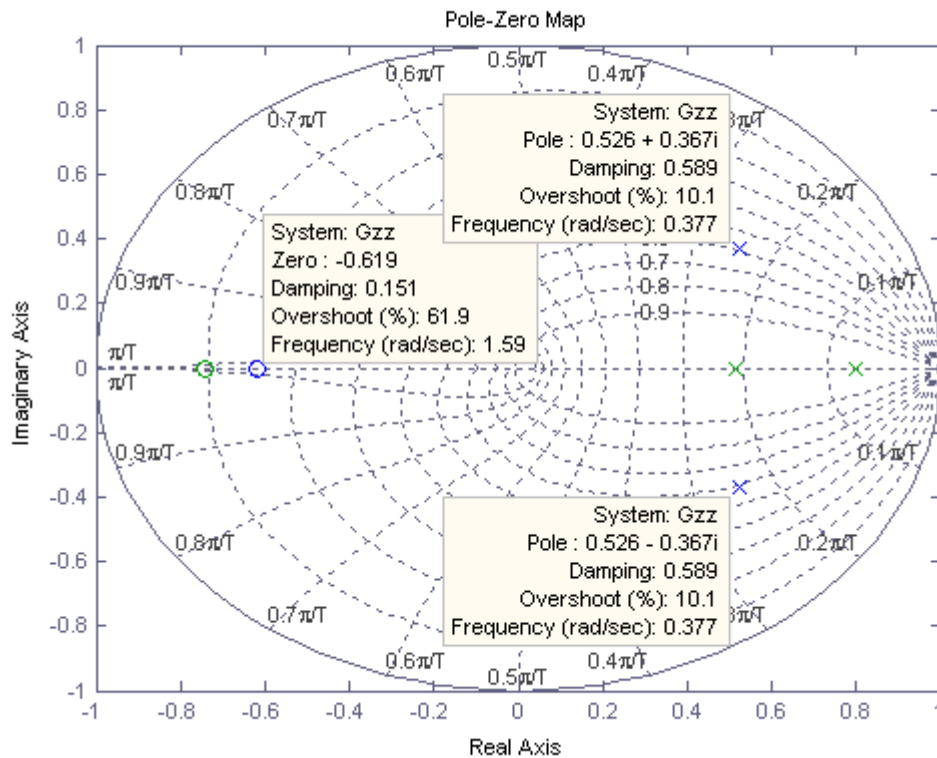
```
W=[B Ab A2b]
W =
    1.0000    1.0000    1.0000
         0    1.0000    0.3599
         0         0    0.6574
>> det(W)
ans = 0.6574
```

Obserwowalność:

```
>> V=[C;cA;cA2]
V =
    3.0000   -2.2112    1.9826
    0.7888    2.7187   -1.4536
    3.5075   -2.6958    1.7872
>> det(V)
ans = -5.9103
```

c) równoczesna zmiana dla  $a_1$  oraz  $b_0$

$$G(z) = \frac{0,0667 * z^{-1} + 0,0138 * z^{-2}}{1 - 1,051 * z^{-1} + 0,6412 * z^{-2}} * z^{-2}$$



rys 17. charakterystyka przedstawiająca rozkład zer i biegunów dla obiektu dyskretnego przy  $a_1$  na poziomie 80% oraz  $b_0$  na poziomie 120%

Sterowalność:

```

W=[B Ab A2b]
W =
    1.0000    1.0000    1.0000
         0    1.0000    0.3599
         0         0    0.6574
>> det(W)
ans =    0.6574
    
```

Obserwowalność:

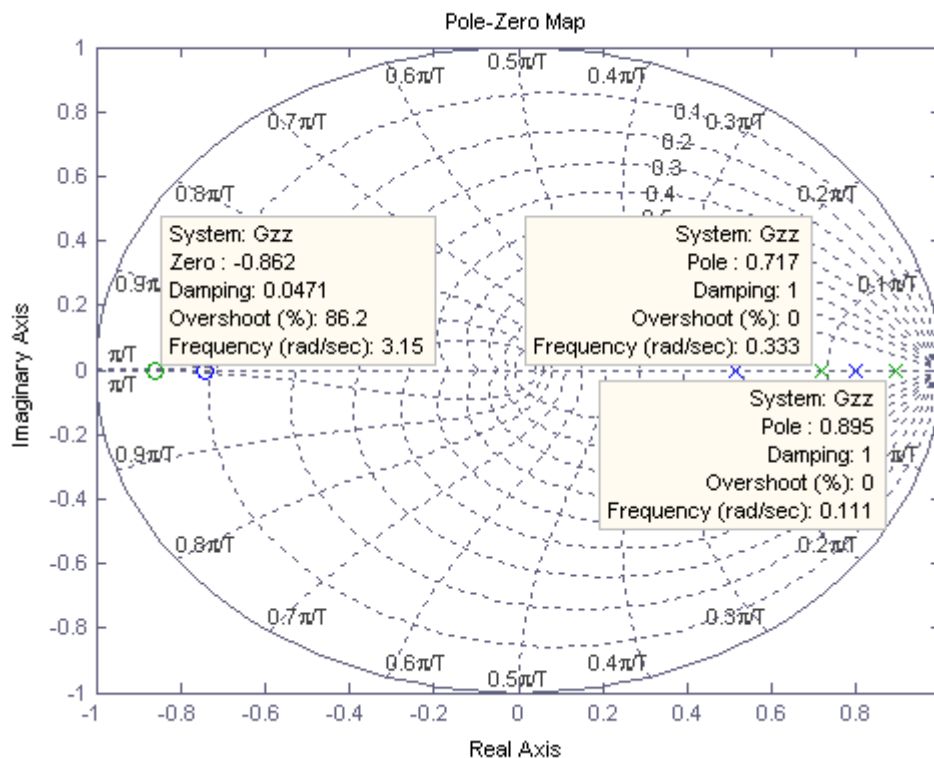
```
>> V=[C;cA;cA2]
V =
  3.0000 -2.2445  1.9847
  0.7888  2.7187 -1.4536
  3.4969 -2.7248  1.8022
>> det(V)
ans = -5.7183
```

Nawet jednoczesna zmiana tych współczynników nie spowodowała zmian we właściwościach naszego obiektu.

Ad 5. Zmiana czasu próbkowania  $T_P$

a) okres próbkowania wynoszący 50%  $T_P$  pierwotnego

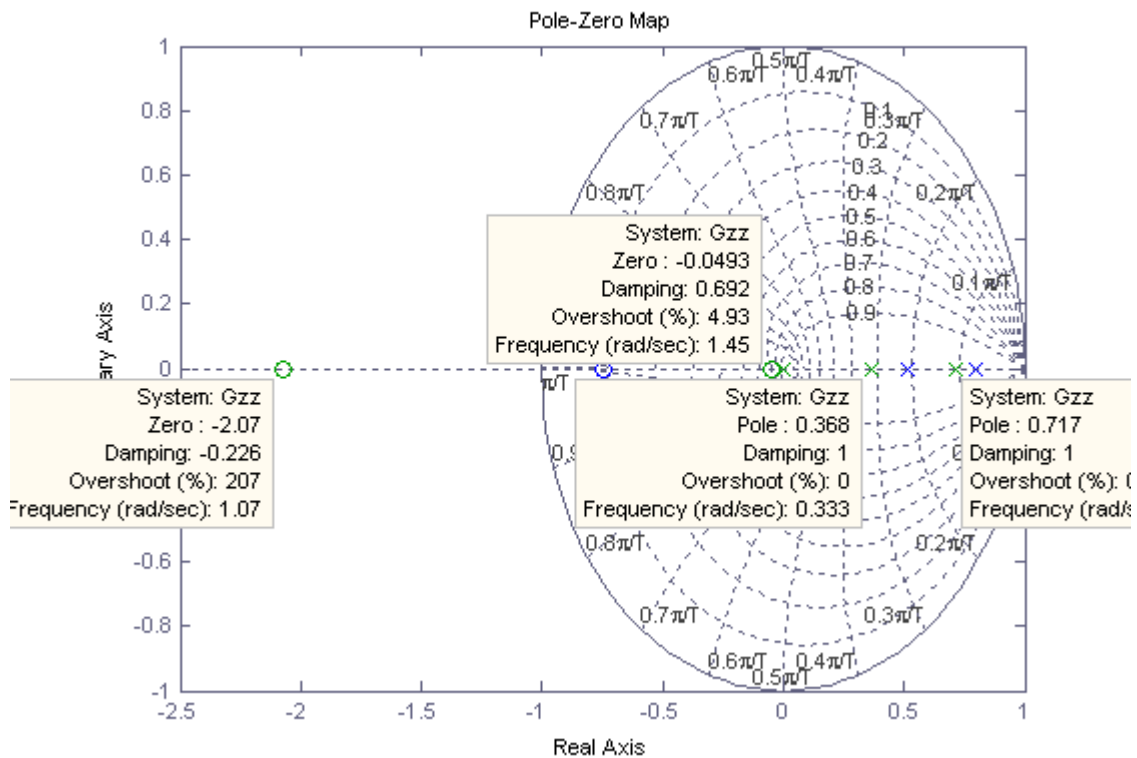
$$G(z) = \frac{0,01601 * z^{-1} + 0,0138 * z^{-2}}{1 - 1,611 * z^{-1} + 0,2636 * z^{-2}} * z^{-4}$$



rys 18. charakterystyka przedstawiająca rozkład zer i biegunów dla obiektu dyskretnego przy  $T_P$  na poziomie 50%

b) okres próbkowania wynoszący 150%  $T_P$  pierwotnego

$$G(z) = \frac{0,0556 * z^{-1} + 0,1179 * z^{-2} + 0,005675 * z^{-3}}{1 - 1,084 * z^{-1} + 0,2636 * z^{-2}} * z^{-1}$$



rys 19. charakterystyka przedstawiająca rozkład zer i biegunów dla obiektu dyskretnego przy  $T_P$  na poziomie 150%

c) wnioski z przeprowadzonych symulacji

Przy zmianie czasu próbkowania do wartości 50%  $T_P$  pierwotnego, obiekt zachowuje swoje oryginalne właściwości, a dokładnie nadal jest obiektem minimalno-fazowym (co przedstawia rysunek 19). Ponadto jest sterowalny i obserwowalny. Poniżej przedstawiamy obliczenia w programie Matlab:

```
> Z=[0.01601, 0.0138]
Z =
    0.0160    0.0138
>> P=[1, -1.611  0.2636]
P =
    1.0000   -1.6110    0.2636
>> K=5
K =
    5
```

```
>> [A,B,C,D]=zp2ss(Z,P,K)
```

```
A =
```

```
1.0000    0    0
1.0000 -1.3474  0.6517
0  0.6517    0
```

```
B =
```

```
1
0
0
```

```
C =
```

```
5.0000 -6.8860  3.2600
```

```
D =
```

```
0
```

```
>> A2=A*A
```

```
A2 =
```

```
1.0000    0    0
-0.3474  2.2401 -0.8780
0.6517 -0.8780  0.4247
```

```
>> Ab=A*B
```

```
Ab =
```

```
1
1
0
```

```
>> A2b=A2*B
```

```
A2b =
```

```
1.0000
-0.3474
0.6517
```

```
>> W=[B Ab A2b]
```

```
W =
```

```
1.0000  1.0000  1.0000
0  1.0000 -0.3474
0    0  0.6517
```

```
>> det(W)
```

```
ans =  0.6517
```

```
>> cA2=C*A2
```

```
cA2 =
```

```
9.5166 -18.2882  7.4307
```

```
>> cA=C*A
```

```
cA =
```

```
-1.8860  11.4027 -4.4874
```

```

>> V=[C;cA;cA2]
V =
    5.0000  -6.8860  3.2600
   -1.8860  11.4027  -4.4874
    9.5166 -18.2882  7.4307
>> det(V)
ans = -30.4341

```

Przy zmianie czasu próbkowania do wartości 150%  $T_p$  pierwotnego, obiekt nie jest już minimalno-fazowy, ponieważ jedno z zer leży poza obszarem koła jednostkowego na płaszczyźnie liczb zespolonych. Z wykonanych przez nas poniższych obliczeń wynika, że obiekt nadal jest sterowalny i obserwowalny.

```

>> Z=[0.0556 0.1179 0.005675]
Z =
    0.0556  0.1179  0.0057
>> P=[1, -1.084, 0.2636]
P =
    1.0000  -1.0840  0.2636
>> K=2
K =
    2
>> [A,B,C,D]=zp2ss(Z,P,K)
A =
    1.0000     0     0
    0.8821  -0.8204  0.5345
         0  0.5345     0
B =
    1
    1
    0
C =
    1.7642  -1.7634  1.0703
D =
    2

>> Ab=A*B
Ab =
    1.0000
    0.0617
    0.5345
>> A2=A*A
A2 =
    1.0000     0     0
    0.1584  0.9588  -0.4385
    0.4715  -0.4385  0.2857

>> A2b=A2*B

```

```
A2b =  
 1.0000  
 1.1172  
 0.0330
```

```
>> W=[B Ab A2b]
```

```
W =  
 1.0000 1.0000 1.0000  
 1.0000 0.0617 1.1172  
 0 0.5345 0.0330
```

```
>> det(W)
```

```
ans = -0.0936
```

```
>> cA=C*A
```

```
cA =  
 0.2087 2.0188 -0.9426
```

```
>> cA2=C*A2
```

```
cA2 =  
 1.9895 -2.1601 1.0791
```

```
>> V=[C;cA;cA2]
```

```
V =  
 1.7642 -1.7634 1.0703  
 0.2087 2.0188 -0.9426  
 1.9895 -2.1601 1.0791
```

```
>> det(V)
```

```
ans = -0.8259
```